Навигационно-пилотажные приборы ПНК

Сроки

Время лекций: Четверг 15.40-17.15 (17.25 - 18.10) Аудитория: 413ю

Лекция						
Пилотажно-навигационные Приборы ПНК	*д.т.н. профессор Окоёмов Барит Николаевич*	01	10.02.2011	05	10.03.2011
		02	17.02.2011	06	17.03.2011
		03	24.03.2011	07	24.03.2011
		04	03.03.2011		
Глобальные спутниковые навигационные системы (ГСНС)/ Современные ПНК	*Братанов Дмитрий Александрович dm.bratanov@gmail.com*	Л1	31.03.2011	Л5	28.04.2011
		Л2	07.04.2011	**Л6**	**12.05.2011**
		Л3	14.04.2011	Л7	19.05.2011
		Л4	21.04.2011	Л8	26.05.2011
		Д3	05.05.2011	***Зачет***	

Лекция 6. Позиционирование по псевдорасстояниям

- Неизвестные параметры.
- Линеаризация.
- Метод наименьших квадратов (Least Squares Estimation).
- Установка и решение нормальных уравнений.
- Невязка (residual) и степени свободы (degree of freedom).
- Формальная точность параметров и распространение ошибок.
- Bancroft алгоритм.

6.1. Неизвестные параметры

Начнем с ***уравнений наблюдений,*** соответствующих ionosphere free линейной комбинации псевдорасстояний на двух частотах

$$PC_r^s = \left|\mathbf{r}^s - \mathbf{r}_r\right| + c\delta t_r - c\delta t^s + T_r^s + \varepsilon_r^s$$

Уравнение содержит наблюдения (слева) и модель наблюдений (справа). Правая часть позволяет рассчитать значения наблюдений если все параметры известны.

Разность между наблюдениями и моделью (правило «O – C», т.е. «observed minus computed») называется невязкой (***residual***)

Минимизация невязки с использованием, например, условия минимума квадратов (least squares condition) позволяет оценить неизвестные параметры.

6.1. Неизвестные параметры

Транслируемая информация содержит координаты спутника в эпохе наблюдений (т.е. за вычетом light travel time) и вычисляемую коррекцию часов спутника.

Для тропосферного запаздывания может быть использована простейшая модель

$$T_r^s = T_0 / \cos(z_r^s)$$

где тропосферное запаздывание в зените T_0=2.3 м; z – зенитный угол спутника относительно антенны приемника.

Следовательно, неизвестными являются местоположение антенны приемника (3 координаты) и коррекция часов приемника.

$$PC_r^s = |\mathbf{r}^s - \mathbf{r}_r| + c\delta t_r - c\delta t^s + T_0/\cos(z_r^s) + \varepsilon_r^s$$

6.1. Неизвестные параметры

Более детально расстояние (range) может быть записано в виде:

$$\rho_r^s = \sqrt{(x^s - x_r)^2 + (y^s - y_r)^2 + (z^s - z_r)^2}$$

Для измерений спутников s_1, …, s_2 в одинаковых эпохах мы получим

$$PC_r^{s_1} = \sqrt{(x^{s_1} - \boxed{x_r})^2 + (y^{s_1} - \boxed{y_r})^2 + (z^{s_1} - \boxed{z_r})^2} + c\,\boxed{\delta t_r} - c\delta t^{s_1}$$

$$PC_r^{s_2} = \sqrt{(x^{s_2} - \boxed{x_r})^2 + (y^{s_2} - \boxed{y_r})^2 + (z^{s_2} - \boxed{z_r})^2} + c\,\boxed{\delta t_r} - c\delta t^{s_2}$$

$$PC_r^{s_3} = \sqrt{(x^{s_3} - \boxed{x_r})^2 + (y^{s_3} - \boxed{y_r})^2 + (z^{s_3} - \boxed{z_r})^2} + c\,\boxed{\delta t_r} - c\delta t^{s_3}$$

$$PC_r^{s_4} = \sqrt{(x^{s_4} - \boxed{x_r})^2 + (y^{s_4} - \boxed{y_r})^2 + (z^{s_4} - \boxed{z_r})^2} + c\,\boxed{\delta t_r} - c\delta t^{s_4}$$

т.е. четыре (нелинейных) уравнения для четырех неизвестных: координаты приемника x_r, y_r, z_r и коррекция часов приемника δt_r (тропосферная коррекция учтена выше)

Четвертое измерение может быть интерпретировано как равная поправка радиуса каждой их четырех пересекаемых сфер. Изменяя это смещение можно достичь ситуации когда все 4 сферы пересекаются в одной точке.

6.2. Линеаризация

Перепишем уравнение наблюдений для спутника *i* в виде:

$$PC^i = \sqrt{(x^i - x)^2 + (y^i - y)^2 + (z^i - z)^2} + c\delta t - c\delta t^i + \varepsilon$$

Возможно переписать правую часть более формально как функции неизвестных параметров

$$PC^i = f^i(\mathbf{r}, \delta t) + \varepsilon$$

Разложим эту функции в ряд Тейлора в окрестности $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и δt_0 для неизвестных параметров:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r} \qquad \delta t = \delta t_0 + \Delta\delta t$$

получим:

$$PC^i = f^i(\mathbf{r}_0, \delta t_0) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial r_k} f^i(\mathbf{r}_0, \delta t_0) \cdot \Delta r_k + \frac{\partial}{\partial \delta t} f^i(\mathbf{r}_0, \delta t_0) \cdot \Delta\delta t +$$

$$+ O(\Delta r^2, (\Delta\delta t)^2) + \varepsilon$$

6.2. Линеаризация

$$PC^i = f^i(\mathbf{r}_0, \delta t_0) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial r_k} f^i(\mathbf{r}_0, \delta t_0) \cdot \Delta r_k + \frac{\partial}{\partial \delta t} f^i(\mathbf{r}_0, \delta t_0) \cdot \Delta \delta t +$$
$$+ O(\Delta r^2, (\Delta \delta t)^2) + \varepsilon$$

Линеаризуем полученное выражением пренебрегая квадратичными членами и членами высших порядков, получим:

$$PC^i = f^i(\mathbf{r}_0, \delta t_0) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial r_k} f^i(\mathbf{r}_0, \delta t_0) \cdot \Delta r_k + \frac{\partial}{\partial \delta t} f^i(\mathbf{r}_0, \delta t_0) \cdot \Delta \delta t + \varepsilon$$

или в более компактном представлении:

$$PC^i = f^i(\mathbf{r}_0, \delta t_0) + \nabla f^i(\mathbf{r}_0, \delta t_0) \cdot \Delta \mathbf{r} + \frac{\partial}{\partial \delta t} f^i(\mathbf{r}_0, \delta t_0) \cdot \Delta \delta t + \varepsilon$$

где: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}$ $\qquad \delta t = \delta t_0 + \Delta \delta t$

6.2. Линеаризация

Функция:

$$f^i(\mathbf{r}, \delta t) = \left|\mathbf{r}^i - \mathbf{r}\right| + c\delta t - c\delta t^i$$

Производные:

$$\frac{\partial}{\partial \delta t} f^i = c$$

$$\frac{\partial}{\partial r_k} f^i = -\frac{r_k^i - r_k}{\left|\mathbf{r}^i - \mathbf{r}\right|}$$

$$\nabla f^i = -\frac{\mathbf{r}^i - \mathbf{r}}{\left|\mathbf{r}^i - \mathbf{r}\right|} = -\mathbf{e}^i$$

где $\mathbf{e}^i$ – единичный вектор от антенны приемника до спутника *i*

6.2. Линеаризация

Линеаризованное уравнение наблюдений для наблюдений i имеет вид:

$$PC^i = \left(\left|\mathbf{r}^i - \mathbf{r}_0\right| - c\delta t^i\right) - \mathbf{e}^i \Delta\mathbf{r} + c\Delta\delta t + \varepsilon_i$$

Запишем **вектор наблюдений**:

$$\Delta y_i \equiv PC^i - \left(\left|\mathbf{r}^i - \mathbf{r}_0\right| - c\delta t^i\right) = -\mathbf{e}^i \cdot \Delta\mathbf{r} + c\delta t + \varepsilon_i$$

Для наблюдений i = 1,…, n для всех спутников одной эпохи получим:

$$\begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_1^1 & -e_2^1 & -e_3^1 & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -e_1^n & -e_2^n & -e_3^n & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \delta t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

6.2. Линеаризация

В матричной форме записи получим:

$$\mathbf{\Delta y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{\Delta p} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

где $\mathbf{\Delta y}$ – матрица наблюдений, $\mathbf{A}$ – обобщенная матрица (grand design matrix), $\mathbf{\Delta p}$ – вектор неизвестных (вектор-решение), $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор невязок (residual vector).

$$\mathbf{\Delta y} = \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta y_n \end{pmatrix}_{(\mathrm{n}\times 1)} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -e_1^1 & -e_2^1 & -e_3^1 & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -e_1^n & -e_2^n & -e_3^n & c \end{pmatrix}_{(\mathrm{n}\times \mathrm{n_p})} \qquad \mathbf{\Delta p} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \delta t \end{pmatrix}_{(\mathrm{n_p}\times 1)} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}_{(\mathrm{n}\times 1)}$$

где $n_p = 4$ – количество неизвестных параметров.

6.3. Оценивание методом наименьших квадратов

Условие наименьших квадратов (с не взвешенными измерениями) имеет вид:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \min$$

Это означает, что производные по приращениям параметров равны нулю.

$$\frac{\partial}{\partial \Delta p_k}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \frac{\partial}{\partial \Delta p_k}\left(\left(\Delta\mathbf{y} - \mathbf{A}\Delta\mathbf{p}\right)^{\mathsf{T}} \cdot \left(\Delta\mathbf{y} - \mathbf{A}\Delta\mathbf{p}\right)\right) = 0$$

Введя обозначения:

$$\nabla_{\Delta\mathbf{p}}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\right) = 2\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{T}} \cdot \nabla_{\Delta\mathbf{p}}\boldsymbol{\varepsilon} = 2(\Delta\mathbf{y}^{\mathsf{T}} - \Delta\mathbf{p}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}})\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

получим так называемые нормальные уравнения (*normal equation*):

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\Delta\mathbf{y} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\,\Delta\mathbf{p}$$

6.3. Оценивание методом наименьших квадратов

Normal equation:

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\Delta\mathbf{y} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\,\Delta\mathbf{p}$$

Решение имеет вид:

$$\Delta\mathbf{p} = \left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\Delta\mathbf{y}$$

Матрица $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$ – нормальная матрица уравнения (*normal equation matrix*)

Матрица $(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A})^{-1}$ – кофактор матрица (*cofactor matrix*) – содержит информацию о формальной точности параметров и корреляции между параметрами.

$$\mathbf{Q} = \left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}$$

6.3. Оценивание методом наименьших квадратов

Невязки (residuals):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\mathbf{y} - \mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{p}$$

После опытное СКО веса компоненты может быть рассчитано:

$$m_0 = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\varepsilon}}{n - n_p}} = \sqrt{\frac{\Delta y^{\mathsf{T}}\Delta y - \Delta\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \cdot \Delta\mathbf{p}}{n - n_p}}$$

Количество наблюдений минус количество неизвестных называется числом свободы (*degree of freedom*) $f = n - n_p$

Формальная ошибка (*formal error*) (1-сигма) параметра с индексом k:

$$\sigma(\Delta p_k) = m_0\sqrt{\mathbf{Q}_{kk}}$$

С уточненными параметрами $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p}$ полная процедура оценивания может быть повторена итерационно, пока коррекции меньше формальных ошибок рассматриваемого параметра.

$$\left|\Delta p_k\right| << \sigma(p_k) \qquad \forall k$$

6.4. Bancroft алгоритм

Для получения начального решения можно воспользоваться *Bancroft алгоритмом*:

Пренебрегая тропосферными коррекциями и включая коррекцию часов спутника и наблюдения $(P^s = PC^s - \delta t^s)$ получим для i-го спутника (не записываем индекс приемника):

$$P_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + c\delta t$$

Перенесем коррекцию часов в левую часть уравнения и возведем в квадрат:

$$(P_i - c\delta t)^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2$$

и следовательно:

$$P_i^2 - 2P_i c\delta t + (c\delta t)^2 = r_i^2 - 2x_i x - 2y_i y - 2z_i z + r^2$$

6.4. Bancroft алгоритм

Переупорядочив члены:

$$2x_i x + 2y_i y + 2z_i z - 2P_i c\delta t = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - P_i^2 + x^2 + y^2 + z^2 - (c\delta t)^2$$

Определим четырехмерные вектора:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ c\delta t \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ P_i \end{pmatrix}$$

Рассмотрим, так называемую, норму Лорентциана (*Lorentzian norm*):

$$x^2 + y^2 + z^2 - (c\delta t)^2 = (x, y, z, c\delta t)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ c\delta t \end{pmatrix} \doteq \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{G}\mathbf{x}$$

6.4. Bancroft алгоритм

Запишем наше уравнение с учетом нормы Лорентциана:

$$2\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{G}\mathbf{x}_i + \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{G}\mathbf{x}$$

где:

$$\mathbf{A} \doteq \begin{pmatrix} 2\mathbf{x}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{G} \\ \vdots \\ 2\mathbf{x}_n^{\mathsf{T}}\mathbf{G} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} \doteq \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{G}\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{\mathsf{T}}\mathbf{G}\mathbf{x}_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{G}\mathbf{x} \doteq \lambda \qquad \mathbf{1} \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для наблюдений $i = 1,\ldots,n$ запишем:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} + \lambda\mathbf{1}$$

Таким образом мы получили 4 уравнения для 4-х неизвестных элементов вектора $\mathbf{x}$. Возможно решить это уравнение методом наименьших квадратов если λ будет известно – найдем его.

6.4. Bancroft алгоритм

Соответствующее нормальное уравнение имеет вид:

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} + \lambda\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{1}$$

и решено с $\mathbf{Q} = (\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A})^{-1}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} + \lambda\mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{1}$$

Теперь найдем λ:

$$\lambda = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{G}\mathbf{x}$$

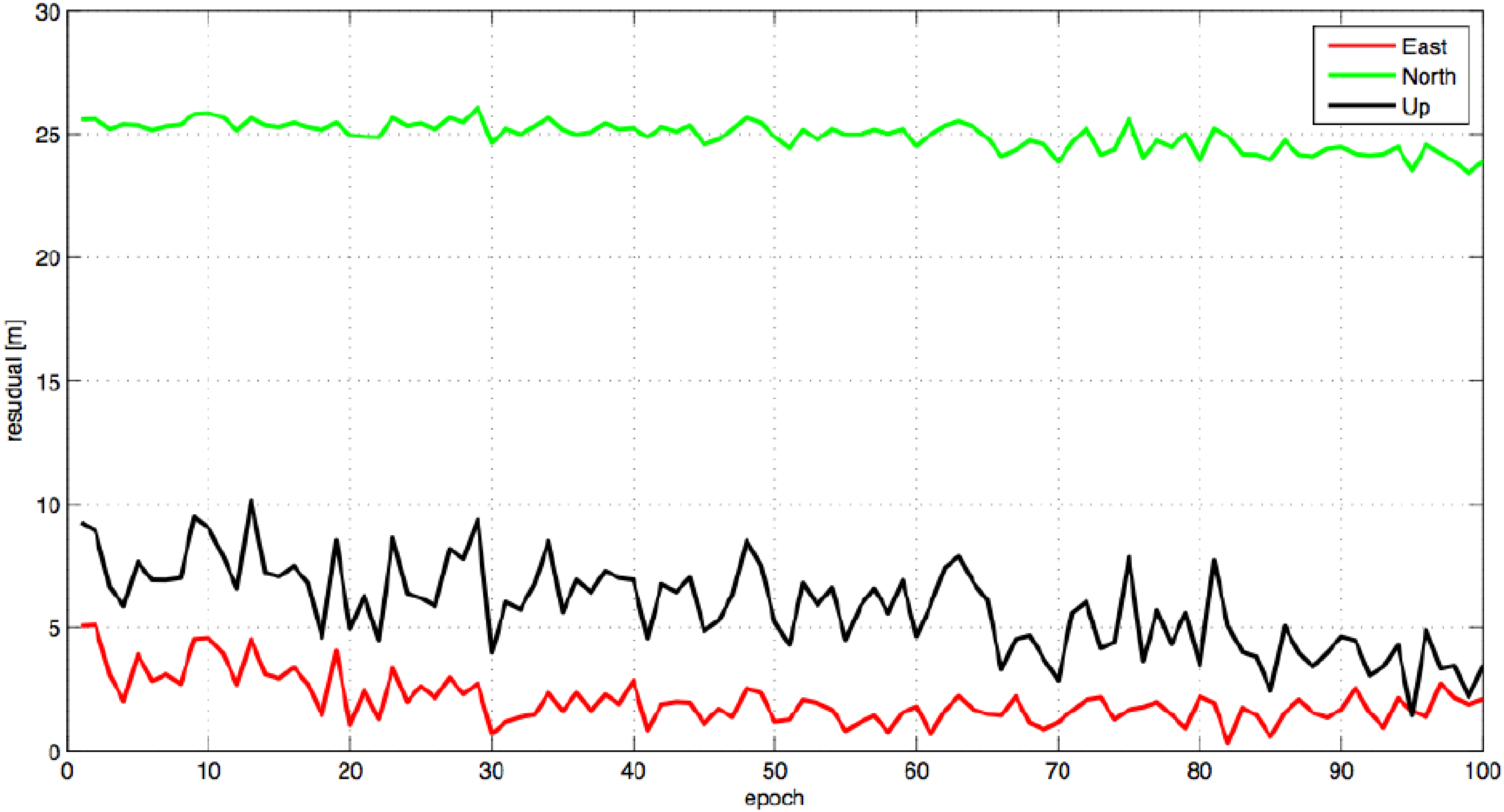
$$= (\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q} + \lambda\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q})\mathbf{G}(\mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} + \lambda\mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{1})$$

$$= \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} + 2\lambda\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{1} + \lambda^2\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{1}$$

Это квадратное уравнение относительно λ. Все коэффициенты скалярные числа. Возможно два решения. Рассчитанное λ используется в уравнении относительно $\mathbf{x}$, приведенном выше.

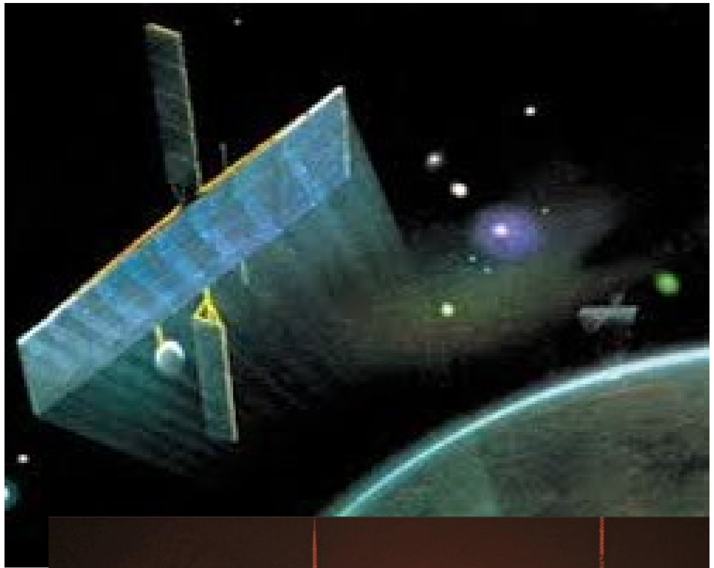
6.5. Пример

Невязки истинных координат станции как функции времени



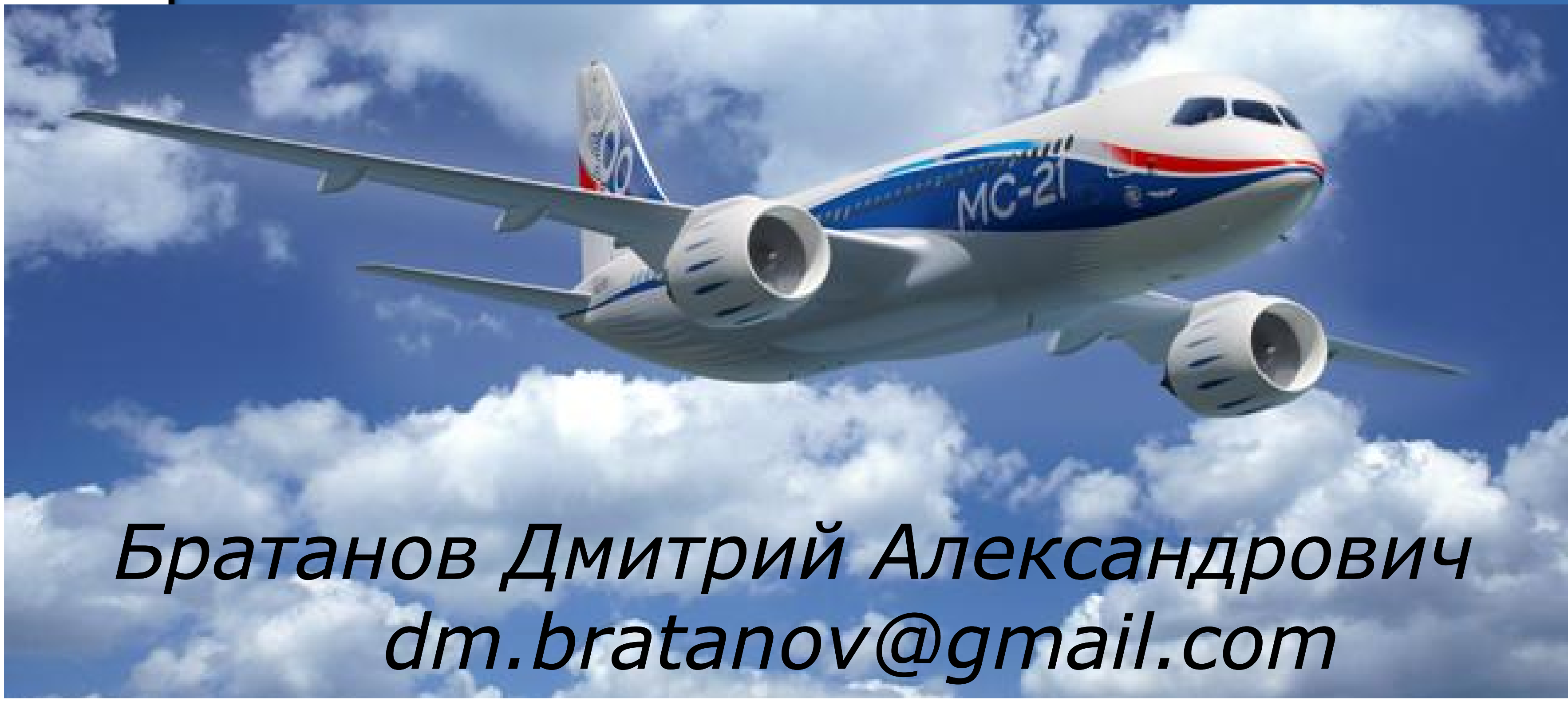
Запуск СНС Бэйдоу

- Китай осуществил успешный запуск восьмого спутника национальной навигационной системы "Бэйдоу" - китайский аналог американской GPS и российской ГЛОНАСС – передает агентство "Синьхуа". Космический аппарат на орбиту вывел ракетоноситель серии "Великий поход - 3А".
- Запуск спутника был совершен 10.04.2011 в 4.47 по местному времени (00.47 мск) с космодрома Сичан на юго-западе Китая.
- Реализация проекта "Бэйдоу" началась в 2000г., первый спутник был выведен на орбиту в 2007г. Согласно планам создателей, жители Азиатско-Тихоокеанского региона смогут воспользоваться ее услугами уже в 2012г.. Окончательное формирование навигационной системы, когда она будет покрывать весь мир, должно завершиться к 2020г.
- В настоящее время Китай с помощью национальной навигационной системы уже осуществляет мониторинг в области лесного и водного хозяйства, транспорта, предотвращения и ликвидации последствий стихийных бедствий. Отмечается, что информация со спутников системы "Бэйдоу" уже применялась специалистами КНР в ходе ликвидации разрушительного землетрясения в Сычуани в мае 2008г., а также в провинции Цинхай в апреле прошлого года.



Читать полностью:
http://top.rbc.ru/society/10/04/2011/573637.shtml

Автоматическое Управление Летательными Аппаратами и рциальные Навигационные Системы



Братанов Дмитрий Александрович
dm.bratanov@gmail.com